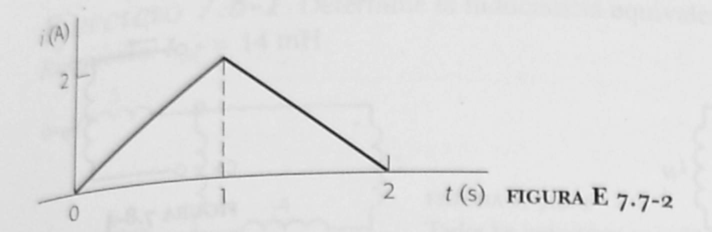


FIGURA E 7.7-2

7.8 Inductores en serie y en paralelo

Una conexión de inductores en serie y en paralelo puede reducirse a un solo inductor equivalente. Considérese una conexión en serie de N inductores como se muestra en la figura 7.8-1. El voltaje a través de la conexión en serie es

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} L_n \right) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Puesto que el inductor equivalente en serie L_s, como se muestra en la figura 7.8-2, está representado por

$$v = L_s \frac{di}{dt}$$

se requiere que

$$L_s = \sum_{n=1}^{N} L_n \tag{7.8-1}$$

Entonces, un inductor equivalente de una serie de inductores es la suma de los N inductores.

Ahora, considérese el conjunto de N inductores en paralelo que aparecen en la figura 7.8-3. La corriente i es igual a la suma de las corrientes en los N inductores.

$$i = \sum_{n=1}^{N} i_n$$

Sin embargo, puesto que

$$i_n = \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_n(t_0)$$

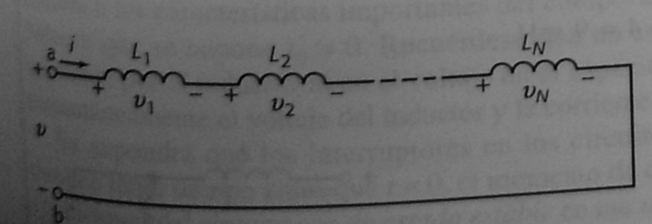


FIGURA 7.8-1
Conexión de N inductores en serie.

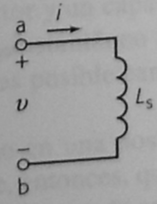


FIGURA 7.8-2
Inductor equivalente L_s para los N inductores en serie.

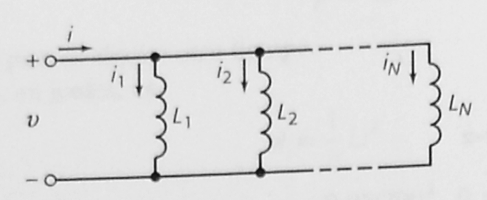


FIGURA 7.8-3
Conexión de N inductores en paralelo.

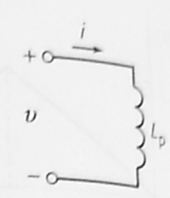


FIGURA 7.8-4
Inductor equivalente L_p para los N inductores en paralelo.

puede obtenerse la expresión

$$i = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^{t} v\,d\tau + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \tag{7.8-2}$$

El inductor equivalente L_P tal como aparece en la figura 7.8-4, está representado por la ecuación

$$i = \frac{1}{L_p} \int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0) \tag{7.8-3}$$

Cuando las ecuaciones 7.8-2 y 7.8-3 se igualan entre sí, se tiene

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{L_n} \tag{7.8-4}$$

e

$$i(t_0) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \tag{7.8-5}$$

Ejemplo 7.8-1

Calcule la inductancia equivalente al circuito de la figura 7.8-5. Todas las corrientes en los inductores son cero en t_0.

Solución

Primero se determina la inductancia equivalente a los inductores de 5 mH y 20 mH en paralelo. De la ecuación 7.8-4 se obtiene

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

o

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 4 \text{ mH}$$

Este inductor equivalente está en serie con los de 2 mH y 3 mH. Por tanto, usando la ecuación 7.8-1, se obtiene

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n = 2 + 3 + 4 = 9 \text{ mH}$$

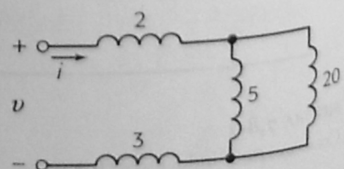


FIGURA 7.8-5
El circuito del ejemplo 7.8-1. Todos los inductores en milihenrys.

Ejercicio 7.8-1 Determine la inductancia equivalente al circuito de la figura E 7.8-1.

Respuesta: $L_{eq} = 14$ mH

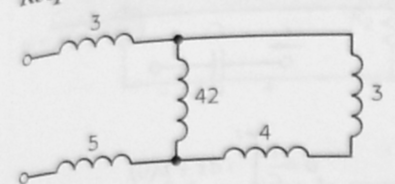


FIGURA E 7.8-1
Todos los inductores en milihenrys.

Ejercicio 7.8-2 Calcule la inductancia equivalente al circuito de la figura E 7.8-2.

Respuesta: $L_{eq} = 4$ mH

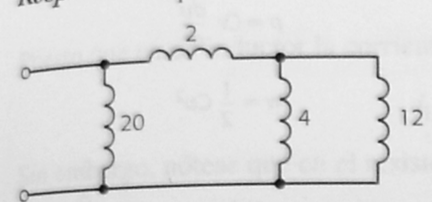


FIGURA E 7.8-2
Todos los inductores en milihenrys.

Ejercicio 7.8-3 Determine la razón de corrientes i_1/i para el circuito de la figura E 7.8-3. Suponga que las corrientes iniciales son cero en t_0.

Respuesta: $\frac{i_1}{i} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$

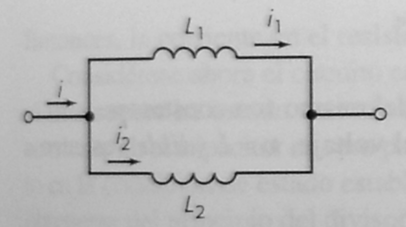


FIGURA E 7.8-3

7.9 Condiciones iniciales de circuitos conmutados

Esta sección se enfoca en determinar el cambio en ciertas variables de un circuito, cuando un interruptor pasa de abierto a cerrado o viceversa. Se considera que el momento de accionar el interruptor es $t = 0$, y se desea determinar el valor de la variable en $t = 0^-$ y $t = 0^+$, inmediatamente antes y después de accionar el interruptor. Entonces, un *circuito conmutado* es un circuito eléctrico con uno o más interruptores que se abren o cierran en el momento $t_0 = 0$.

Interesan particularmente los cambios de la corriente y el voltaje en los elementos que almacenan energía, después de accionar el interruptor, debido a que estas variables, junto con las fuentes, determinarán el comportamiento del circuito para $t > 0$. En la tabla 7.9-1 se resumen las características importantes del comportamiento de un inductor y un capacitor. Nótese que se supone $t_0 = 0$. Recuérdese que no se admite un cambio instantáneo en la corriente por el inductor ni en el voltaje en el capacitor. Sin embargo, sí es posible cambiar instantáneamente el voltaje del inductor y la corriente del capacitor.

Se supondrá que los interruptores en los circuitos se han mantenido en una posición durante largo tiempo antes que $t = 0$, el momento de conmutación. Se dice, entonces, que las condiciones del circuito son de *estado estable* en ese momento. La respuesta de estado estable de un circuito es la que se alcanza al pasar largo tiempo después de una conmutación. Además, cuando sólo son fuentes de cd las que excitan un circuito y éste llega a su estado

Tabla 7.9-1 Características de los elementos que almacenan energía

Variable	Inductores	Capacitores
Convención de signo pasivo	i → L, $+\ v\ -$	i → C, $+\ v\ -$
Voltaje	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$v = \dfrac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + v(0)$
Corriente	$i = \dfrac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + i(0)$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
Potencia	$p = Li\dfrac{di}{dt}$	$p = Cv\dfrac{dv}{dt}$
Energía	$w = \dfrac{1}{2}Li^2$	$w = \dfrac{1}{2}Cv^2$
No se permite cambio instantáneo para el elemento en su:	Corriente	Voltaje
Se admitirá un cambio instantáneo para el elemento en su:	Voltaje	Corriente
Este elemento actúa como un: (ver nota al pie)	Corto circuito a corriente constante en sus terminales	Circuito abierto a voltaje constante a través de sus terminales

Nota: Se supone que el elemento está en un circuito con condición de estado estable.

estable, todas las corrientes y voltajes en todos los ramales del mismo son constantes.

Cuando una corriente constante fluye en un inductor, el voltaje, $v = L\,(di/dt)$, es cero a través del elemento y aparece como un corto circuito.

Una **inductancia** se comporta como un corto circuito para una corriente de cd.

De igual modo, si se aplica un voltaje constante a través de un capacitor, éste aparece como un circuito abierto puesto que $i = C\,dv/dt$ es igual a cero.

Una **capacitancia** se comporta como un circuito abierto para un voltaje de cd.

Primero, considérese un circuito con un inductor como se muestra en la figura 7.9-1. El símbolo del interruptor implica que está abierto en $t = 0^-$ y se cierra en $t = 0$. Antes de accionar el interruptor se supone que el circuito ha mantenido condiciones de estado estable. La corriente de la fuente se divide entre i_1 e i_L de forma que

$$i_1 + i_L = i_f$$

Nótese que i_L es una corriente constante, por lo que el voltaje del inductor será cero. Entonces, utilizando el principio del divisor de corriente,

$$i_L = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, i_f$$

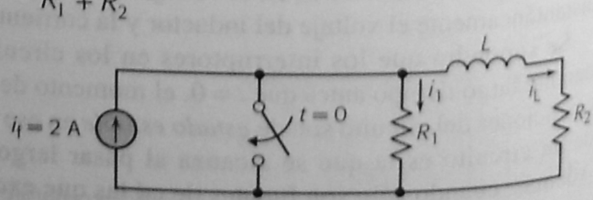


FIGURA 7.9-1
Un circuito *RL*. $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$. El interruptor está abierto en $t < 0$ y se cierra en $t = 0$.

FIGURA 7.9-2
Un circuito *RC*. $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$. El interruptor está cerrado en $t < 0$ y se abre en $t = 0$.

Dado que $i_f = 2$ A, se tiene la corriente en $t = 0^-$. Cuando $R_1 = R_2 = 1$, se obtiene

$$i_L(0^-) = \left(\frac{1}{2}\right)2 = 1\ \text{A}$$

Puesto que en un inductor la corriente no puede cambiar instantáneamente, se tiene

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}$$

Sin embargo, nótese que en el resistor la corriente sí puede cambiar instantáneamente. Antes de $t = 0$

$$i_1(0^-) = 1\ \text{A}$$

Después de accionar el interruptor, el voltaje a través de R_1 es cero, debido a que se crea un corto circuito y, por tanto,

$$i_1(0^+) = 0$$

Entonces, la corriente en el resistor cambia bruscamente de 1 a 0 A.

Considérese ahora el circuito con un capacitor que aparece en la figura 7.9-2. Antes de $t = 0$, el interruptor ha estado cerrado durante largo tiempo. Puesto que la fuente es constante, la corriente en el capacitor es cero para $t < 0$ debido a que el capacitor equivale a un circuito abierto en la condición de estado estable. Por tanto, el voltaje a través del capacitor para $t < 0$ puede obtenerse del principio del divisor de voltaje con R_1 y R_2 de forma que

$$v_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_f$$

Entonces, en $t = 0^-$, cuando $v_f = 10$ y $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$,

$$v_c(0^-) = \left(\frac{1}{2}\right)10 = 5\ \text{V}$$

No obstante, dado que el voltaje a través de un capacitor no puede cambiar instantáneamente,

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 5\ \text{V}$$

Cuando se abre el interruptor en $t = 0$, la fuente se elimina del circuito, pero $v_c(0^+)$ se mantiene igual a 5 V.

Si un circuito tiene tanto un capacitor como un inductor, se considera la corriente y el voltaje antes de $t = 0$ y se calculan $v_c(0^-)$ e $i_L(0^-)$. Como ejemplo, tómese el circuito de la figura 7.9-3. Se supone que el interruptor ha estado cerrado durante largo tiempo y existen condiciones de estado estable. Para determinar $v_c(0^-)$ e $i_L(0^-)$ se reemplaza el capacitor por

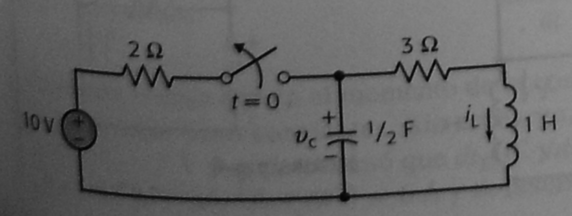


FIGURA 7.9-3
Circuito con un inductor y un capacitor. El interruptor está cerrado durante largo tiempo antes de abrirse en $t = 0$.

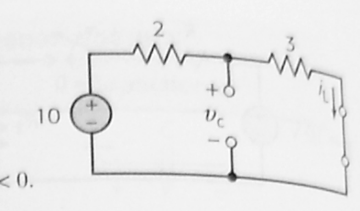


FIGURA 7.9-4
Circuito de la figura 7.9-3 para $t < 0$.

un circuito abierto y el inductor por un corto circuito, como aparece en la figura 7.9-4. Se observa inmediatamente que

$$i_L(0^-) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

Aunque el capacitor es un circuito abierto, como se muestra, tiene un voltaje v_c a través de sus terminales. Utilizando el principio del divisor de voltaje, se observa

$$v_c(0^-) = \left(\frac{3}{5}\right)10 = 6 \text{ V}$$

Entonces se nota que

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 6 \text{ V}$$

e

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2 \text{ A}$$

Ejemplo 7.9-1

Calcule $i_L(0^+)$, $v_c(0^+)$, $dv_c(0^+)/dt$, y $di_L(0^+)/dt$ en el circuito de la figura 7.9-5. Se usará $dv_c(0^+)/dt$ para representar a $dv_c(t)/dt|_{t=0^+}$.

Supóngase que el interruptor 1 ha estado abierto y el 2 cerrado durante largo tiempo, y que en $t = 0^-$ prevalecen las condiciones de estado estable.

Solución

Primero, se vuelve a dibujar el circuito para $t = 0^-$ reemplazando el inductor por un corto circuito y el capacitor por un circuito abierto, como aparece en la figura 7.9-6. Entonces se observa que

$$i_L(0^-) = 0$$

y

$$v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

En consecuencia

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

y

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

Para determinar $dv_c(0^+)/dt$ y $di_L(0^+)/dt$ se cambia el interruptor en $t = 0$ y se cambia el circuito de la figura 7.9-5 como se ve en la figura 7.9-7 (se desconecta la fuente de corriente, puesto que el interruptor se abre).

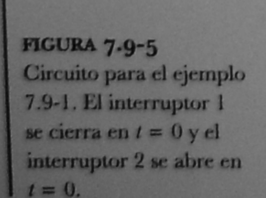
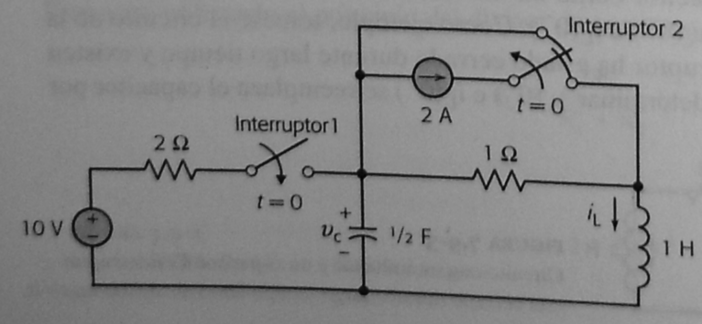


FIGURA 7.9-5
Circuito para el ejemplo 7.9-1. El interruptor 1 se cierra en $t = 0$ y el interruptor 2 se abre en $t = 0$.



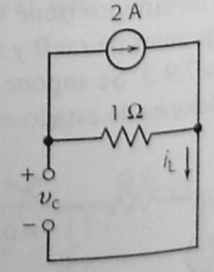


FIGURA 7.9-6
Circuito de la figura 7.9-5 en $t = 0^-$.

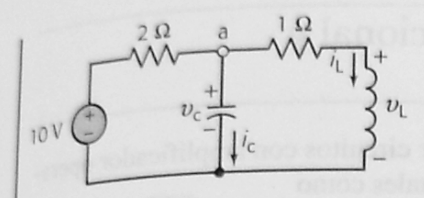


FIGURA 7.9-7
Circuito de la figura 7.9-5 en $t = 0^+$ con el interruptor cerrado y la fuente de corriente desconectada.

Puesto que se desea calcular $d\upsilon_c(0^+)/dt$, se recuerda que

$$i_c = C\frac{d\upsilon_c}{dt}$$

de manera que

$$\frac{d\upsilon_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$$

Igualmente, para el inductor

$$\upsilon_L = L\frac{di_L}{dt}$$

se puede obtener $di_L(0^+)/dt$ como sigue

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{\upsilon_L(0^+)}{L}$$

Usando la LVK para la malla derecha de la figura 7.9-7, se obtiene

$$\upsilon_L - \upsilon_c + 1i_L = 0$$

por tanto, en $t = 0^+$

$$\upsilon_L(0^+) = \upsilon_c(0^+) - i_L(0^+) = -2 - 0 = -2\text{ V}$$

Entonces

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = -2\text{ A/s}$$

De igual forma, para determinar i_c se plantea la LCK en el nodo a para obtener

$$i_c + i_L + \frac{\upsilon_c - 10}{2} = 0$$

En consecuencia, en $t = 0^+$

$$i_c(0^+) = \frac{10 - \upsilon_c(0^+)}{2} - i_L(0^+) = 6 - 0 = 6\text{ A}$$

Por consiguiente

$$\frac{d\upsilon_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{6}{1/2} = 12\text{ V/s}$$

Entonces, resulta que en el momento de la conmutación, $t = 0$, la corriente en el inductor y el voltaje en el capacitor se mantuvieron constantes. Sin embargo, el voltaje del inductor cambió instantáneamente de $\upsilon_L(0^-) = 0$ a $\upsilon_L(0^+) = -2$ V y se determinó que $di_L(0^+)/dt = -2$ A/s. También, la corriente del capacitor cambia instantáneamente de $i_c(0^-) = 0$ a $i_c(0^+) = 6$ A y se determina que $d\upsilon_c(0^+)/dt = 12$ V/s.

7.10 Circuitos con amplificador operacional y ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección se describe un procedimiento para diseñar circuitos con amplificador operacional que implementan ecuaciones diferenciales lineales tales como

$$2\frac{d^3}{dt^3}y(t)+5\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4\frac{d}{dt}y(t)+3y(t)=6\,x(t) \tag{7.10-1}$$

La solución de esta ecuación es una función, $y(t)$, que depende de la función $x(t)$ y de un conjunto de condiciones iniciales. Es conveniente usar las condiciones iniciales:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)=0,\quad \frac{d}{dt}y(t)=0 \quad \text{y} \quad y(t)=0 \tag{7.10-2}$$

Luego de especificar estas condiciones iniciales, se espera que a cualquier función $x(t)$ dada corresponda una función $y(t)$ única. En consecuencia $x(t)$ se tratará como la entrada a la ecuación diferencial e $y(t)$ como la salida.

En la sección 6.7 se introdujo la noción de diagramar operaciones como bloques y las ecuaciones como diagramas de bloque. En la misma sección también se introdujeron los bloques para representar la adición y la multiplicación por una constante. En la figura 7.10-1 se ilustran dos bloques adicionales que representan la integración y la diferenciación.

Supóngase que de algún modo se ha obtenido $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ Entonces se podría integrar tres veces para obtener $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$, $\frac{d}{dt}y(t)$, e $y(t)$, como se ilustra en la figura 7.10-2.

Ahora se debe de obtener $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ Para hacer esto se despeja en la ecuación 7.10-1 $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ y se obtiene

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)=3\,x(t)-\left[2.5\frac{d^2}{dt^2}y(t)+2\frac{d}{dt}y(t)+1.5\,y(t)\right] \tag{7.10-3}$$

A continuación se representa la ecuación 7.10-3 por un diagrama de bloque tal como el diagrama mostrado en la figura 7.10-3. Finalmente los diagramas de bloque de las figuras 7.10-2 y 7.10-3 se pueden combinar como se muestra en la figura 7.10-4 para obtener el diagrama de bloque de la ecuación 7.10-1.

La siguiente tarea es implementar el diagrama de bloque como un circuito con amplificador operacional. En la figura 7.10-5 se presentan circuitos con amplificador operacional que implementan respectivamente la diferenciación y la integración. Para ver cómo funciona el integrador, considérese la figura 7.10-6. Los nodos del integrador en la figura 7.10-6 han sido etiquetados antes de escribir las ecuaciones de nodo. Respectivamente υ_1, υ_2 y υ_3 denotan los voltajes de nodo en los nodos 1, 2 y 3.

La entrada del integrador es $x(t)$, el voltaje de nodo en el nodo 1. Así $\upsilon_1 = x(t)$. La salida del integrador es $y(t)$, el voltaje de nodo en el nodo 3. Así $\upsilon_3 = y(t)$. La entrada no inversora del amplificador operacional ideal está ligada al nodo de referencia, y la entrada inversora está conectada al nodo 2. Los voltajes de nodo en estos dos nodos deben ser iguales, así $\upsilon_2 = 0$.

El voltaje a través del resistor está relacionado con los voltajes de nodo en los nodos del resistor por

$$\upsilon_R(t)=\upsilon_1(t)-\upsilon_2(t)=x(t)-0=x(t)$$

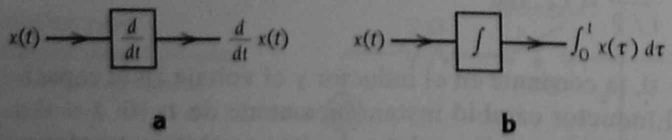


FIGURA 7.10-1
Representación con diagrama de bloque de (*a*) la diferenciación y (*b*) la integración.

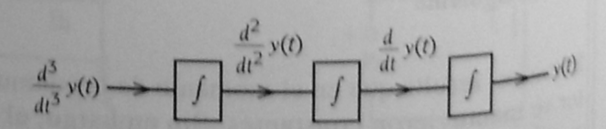


FIGURA 7.10-2
Primer diagrama de bloque parcial.

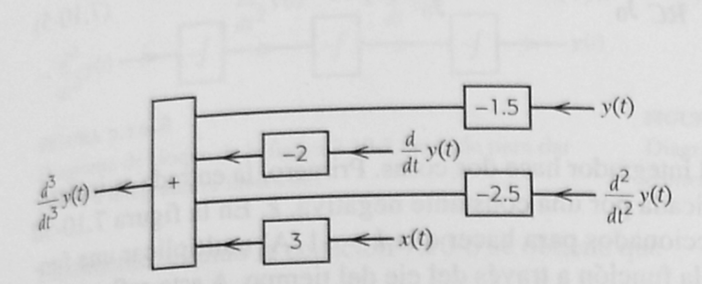


FIGURA 7.10-3
Diagrama de bloque que representa la ecuación 7.10-3.

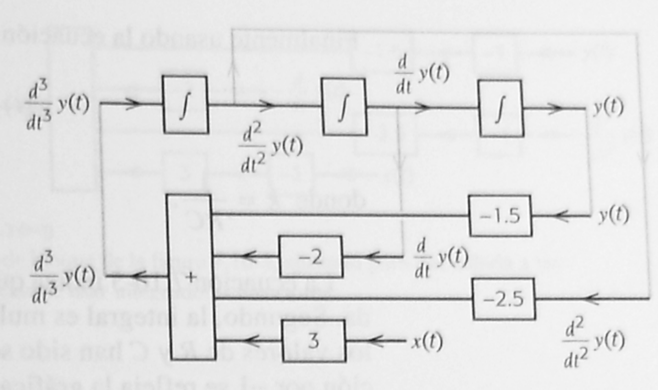


FIGURA 7.10-4
Diagrama de bloque que representa la ecuación 7.10-1.

La corriente del resistor se calcula usando la ley de Ohm como

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{x(t)}{R}$$

El valor de la corriente que fluye hacia la entrada del amplificador operacional ideal es cero, así al aplicar la LCK al nodo 2 se obtiene que

$$i_C(t) = i_R(t) = \frac{x(t)}{R}$$

El voltaje a través del capacitor está relacionado con los voltajes de nodo en los nodos del capacitor por

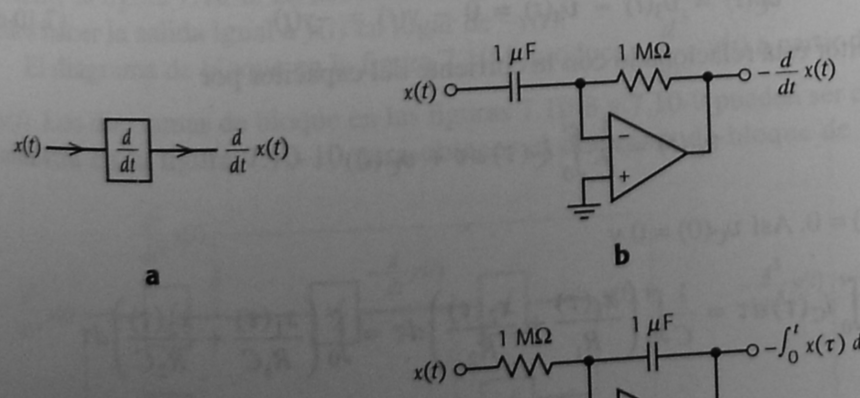
$$v_C(t) = v_2(t) - v_3(t) = 0 - y(t) = -y(t) \qquad (7.10\text{-}4)$$

El voltaje del capacitor está relacionado con la corriente del capacitor por

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau + v_C(0)$$

Recuérdese que $y(0) = 0$. Así $v_C(0) = 0$ y

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{x(\tau)}{R}\,d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t x(\tau)\,d\tau$$



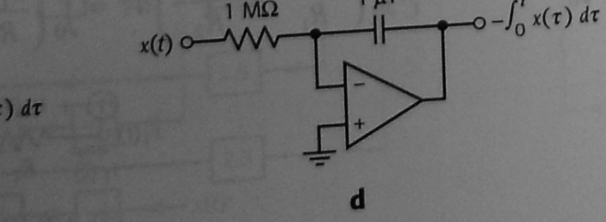


FIGURA 7.10-5
Representación con diagrama de bloque de (*a*) la diferenciación y (*c*) la integración. Circuitos correspondientes con amplificador operacional que (*b*) diferencian y (*d*) integran.

FIGURA 7.10-6
El integrador.

Finalmente usando la ecuación 7.10-4 se obtiene que

$$y(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t x(\tau)\,d\tau = -k\int_0^t x(\tau)\,d\tau \tag{7.10-5}$$

donde $k = \dfrac{1}{RC}$.

La ecuación 7.10-5 indica que el integrador hace dos cosas. Primero, la entrada es integrada. Segundo, la integral es multiplicada por una constante negativa, k. En la figura 7.10-5d los valores de R y C han sido seleccionados para hacer que $k = -1$. Al multiplicar una función por -1 se refleja la gráfica de la función a través del eje del tiempo. A esta reflexión se le llama inversión y se dice que el circuito es un circuito inversor. En consecuencia el integrador mostrado en la figura 7.10-5d algunas veces es llamado integrador inversor. A este circuito se le llamará integrador a menos que se desee destacar la inversión, caso en el cual el circuito se denotará como integrador inversor.

El análisis del integrador sumador mostrado en la figura 7.10-7 es similar al análisis del integrador. Las entradas del integrador sumador son $x_1(t)$, el voltaje de nodo en el nodo 1, y $x_2(t)$, el voltaje de nodo en el nodo 2. La salida del integrador es $y(t)$, el voltaje de nodo en el nodo 4. El amplificador operacional ideal produce un voltaje cero en el nodo 3. Por lo tanto

$$v_1(t) = x_1(t), \quad v_2(t) = x_2(t), \quad v_3(t) = 0, \quad \text{y} \quad v_4(t) = y(t)$$

Al usar la ley de Ohm se muestra que las corrientes en los resistores son

$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} = \frac{x_1(t)}{R_1} \quad \text{e} \quad i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{x_2(t)}{R_2}$$

El valor de la corriente que fluye a la entrada del amplificador operacional ideal es cero, por tanto al aplicar la LCK en el nodo 3 se obtiene que

$$i_C(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{x_1(t)}{R_1} + \frac{x_2(t)}{R_2}$$

El voltaje a través del capacitor está relacionado con los voltajes de nodo en los nodos del capacitor por

$$v_C(t) = v_3(t) - v_4(t) = 0 - y(t) = -y(t) \tag{7.10-6}$$

El voltaje del capacitor está relacionado con la corriente del capacitor por

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau + v_C(0)$$

Recuérdese que $y(0) = 0$. Así $v_C(0) = 0$ y

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1} + \frac{x_2(\tau)}{R_2}\right)d\tau = \int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C}\right)d\tau$$

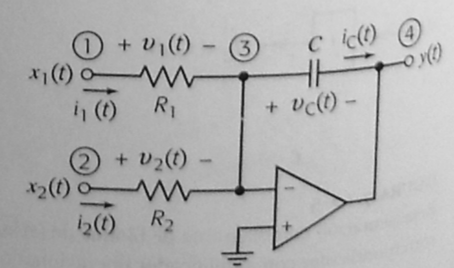
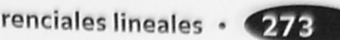


FIGURA 7.10-7
El integrador sumador.



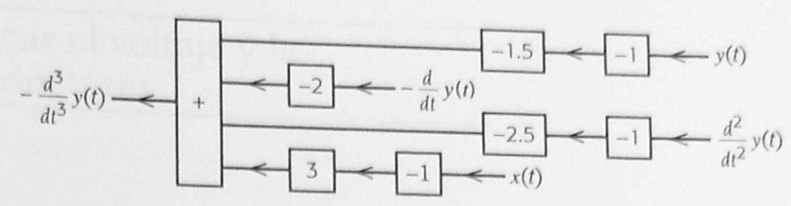


FIGURA 7.10-8
Diagrama de bloque de la figura 7.10-2 ajustado para dar cabida a integradores inversores.

FIGURA 7.10-9
Diagrama de bloque de la figura 7.10-3, ajustado para dar cabida a las consecuencias de usar integradores inversores.

Finalmente, usando la ecuación 7.10-6 se obtiene que

$$y(t) = -\int_0^t \left(\frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C} \right) d\tau = -\int_0^t (k_1 x_1(\tau) + k_2 x_2(\tau))\, d\tau \quad (7.10\text{-}7)$$

donde $k_1 = \dfrac{1}{R_1 C}$ y $k_2 = \dfrac{1}{R_2 C}$.

La ecuación 7.10-7 indica que el integrador sumador realiza cuatro cosas. Primero, cada entrada está multiplicada por una constante particular: x_1 está multiplicada por k_1, y x_2 está multiplicada por k_2. Segundo, los productos están sumados. Tercero, la suma es integrada. Cuarto, la integral está multiplicada por −1. (Como el integrador inversor, este circuito invierte su salida. Algunas veces se le llama integrador sumador inversor. Afortunadamente no se necesita usar este nombre tan largo muy frecuentemente.)

El amplificador sumador en la figura 7.10-7 da cabida a dos entradas. Para dar cabida a entradas adicionales se suman más resistores de entrada, cada uno conectado entre un nodo de entrada y el nodo de entrada inversora del amplificador operacional. (El circuito con amplificador operacional que implementa la ecuación 7.10-1 requerirá un integrador sumador de cuatro entradas.)

Se diseñará un circuito con amplificador operacional para implementar la ecuación 7.10-1 reemplazando los bloques en el diagrama de bloque de la ecuación 7.10-1 por circuitos con amplificador operacional. Este proceso será fácil si primero se modifica el diagrama de bloque para dar cabida a integradores *inversores*. Las figuras 7.10-8 y 7.10-9 muestran versiones modificadas de los diagramas de bloque a partir de las figuras 7.10-2 y 7.10-3. Se reemplazan todos los integradores en la figura 7.10-2 por integradores inversores para obtener la figura 7.10-8. Es necesario hacer la entrada igual a $-\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ en lugar de $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ para hacer la salida igual a $y(t)$ en lugar de $-y(t)$.

El diagrama de bloque en la figura 7.10-9 produce $-\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ a partir de $\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\frac{d}{dt}y(t)$ e $y(t)$. Los diagramas de bloque en las figuras 7.10-8 y 7.10-9 pueden ser combinados como se muestra en la figura 7.10-10 para obtener el diagrama de bloque de la ecuación 7.10-1.

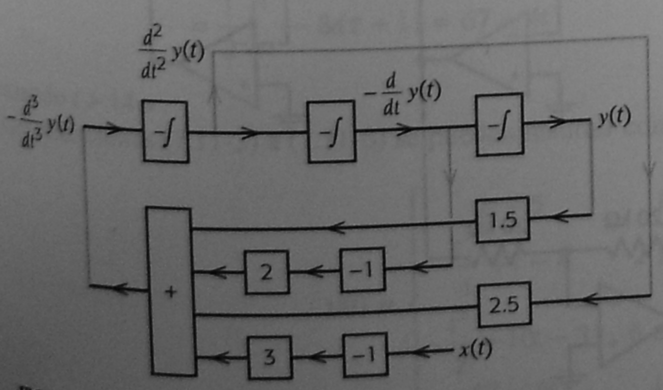


FIGURA 7.10-10
Diagrama de bloque que representa la ecuación 7.10-1, ajustado para dar cabida a los integradores inversores.

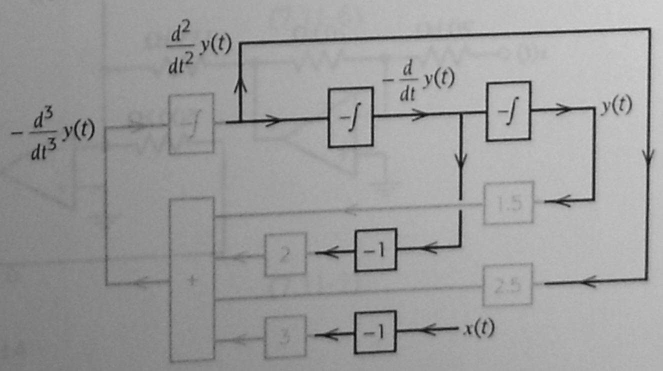


FIGURA 7.10-11
Diagrama de bloque que representa la ecuación 7.10-1, y que destaca la parte implementada por el integrador sumador.

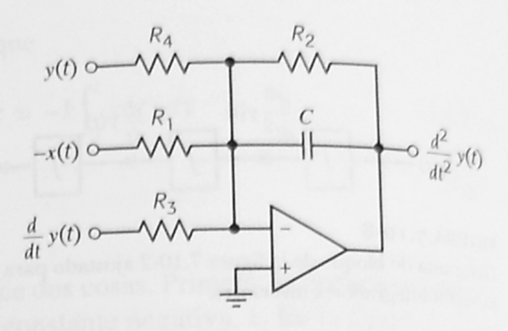


FIGURA 7.10-12
Integrador sumador.

Un integrador sumador puede multiplicar cada una de sus entradas por una constante particular, sumar los productos e integrar la suma. El diagrama de bloque mostrado en la figura 7.10-11 destaca los bloques que pueden ser implementados por un solo integrador sumador de cuatro entradas.

La figura 7.10-12 muestra el integrador sumador de cuatro entradas. La señal $\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)$ es la salida de este circuito y también es una de las entradas del circuito. El resistor R_2 está conectado entre esta entrada y el nodo conectado a la entrada inversora del amplificador operacional. El integrador sumador está representado por la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) = -\int_0^t \left(\frac{1}{R_1 C}[-x(t)] + \frac{1}{R_2 C}\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + \frac{1}{R_3 C}\left[\frac{d}{dt}\,y(t)\right] + \frac{1}{R_4 C}\,y(t)\right) d\tau \qquad (7.10\text{-}8)$$

Integrando ambos lados de la ecuación 7.10-3 se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) = -\int_0^t \left(3[-x(t)] + 2.5\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 2\left[\frac{d}{dt}\,y(t)\right] + 1.5\,y(t)\right) d\tau \qquad (7.10\text{-}9)$$

Por conveniencia, se selecciona $C = 1\ \mu\text{F}$. Comparando las ecuaciones 7.10-8 y 7.10-9 resulta que

$$R_1 = 333\ \text{k}\Omega, \quad R_2 = 400\ \text{k}\Omega, \quad R_3 = 500\ \text{k}\Omega, \quad \text{y} \quad R_4 = 667\ \text{k}\Omega$$

El integrador sumador implementa la mayor parte del diagrama de bloque, dejando únicamente otros cuatro bloques para ser implementados. Estos cuatro bloques son implementados usando dos integradores inversores y dos amplificadores inversores. El circuito terminado se muestra en la figura 7.10-13.

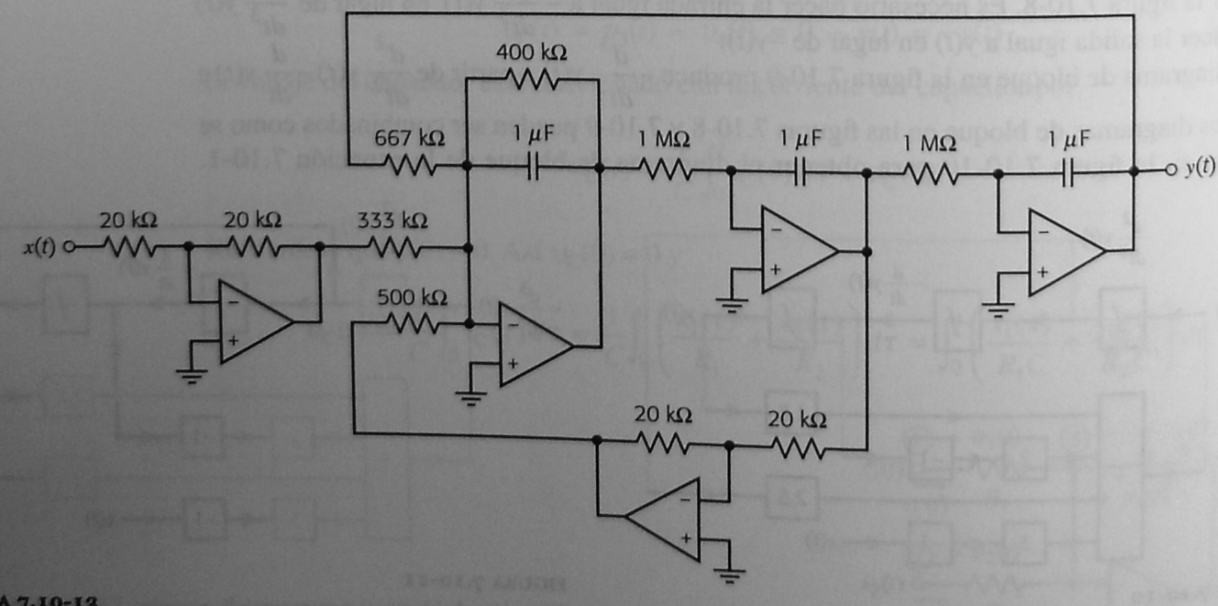


FIGURA 7.10-13
Circuito con amplificador operacional que implementa la ecuación 7.10-1.

7.11 Uso de MATLAB para graficar el voltaje y la corriente en capacitores o inductores

Suponga que la corriente en un capacitor de 2 F es

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t \le 2 \\ t+2 & 2 \le t \le 6 \\ 20-2t & 6 \le t \le 14 \\ -8 & t \ge 14 \end{cases} \tag{7.11-1}$$

donde las unidades de la corriente son A y las unidades del tiempo son s. Cuando el voltaje inicial en el capacitor es $v(0) = -5$ V, el voltaje del capacitor se puede calcular usando:

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_0^t i(\tau)d\tau - 5 \tag{7.11-2}$$

La ecuación 7.11-1 indica que $i(t) = 4$ A mientras $t < 2$ s. Al usar esta corriente en la ecuación 7.11-2 da por resultado

$$v(t) = \frac{1}{2}\int_0^t 4d\tau - 5 = 2t - 5 \tag{7.11-3}$$

cuando $t < 2$ s. Después, la ecuación 7.11-1 indica que $i(t) = t + 2$ A mientras $2 < t < 6$ s. Usando esta corriente en la ecuación 7.11-2 da por resultado

$$v(t) = \frac{1}{2}\left(\int_2^t(\tau+2)d\tau + \int_0^2 4d\tau\right) - 5 = \frac{1}{2}\int_2^t(\tau+2)d\tau - 1 = \frac{t^2}{4} + t - 4 \tag{7.11-4}$$

cuando $2 < t < 6$ s. Continuando de este modo, se calcula

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2}\left(\int_6^t(20-2\tau)d\tau + \int_2^6(\tau+2)d\tau + \int_0^2 4d\tau\right) - 5 \\ &= \frac{1}{2}\int_6^t(20-2\tau)d\tau + 11 = -\frac{t^2}{2} + 10t - 31 \end{aligned} \tag{7.11-5}$$

cuando $6 < t < 14$ s y

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2}\left(\int_{14}^t -8d\tau + \int_6^{14}(20-2\tau)d\tau + \int_2^6(\tau+2)d\tau + \int_0^2 4d\tau\right) - 5 \\ &= \frac{1}{2}\int_{14}^t -8d\tau + 11 = 67 - 4t \end{aligned} \tag{7.11-6}$$

cuando $t > 14$ s.

Las ecuaciones (7.11-3) a (7.11-6) se pueden resumir como

$$v(t) = \begin{cases} 2t-5 & t \le 2 \\ \dfrac{t^2}{4} + t - 4 & 2 \le t \le 6 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 10t - 31 & 6 \le t \le 14 \\ 67-4t & t \ge 14 \end{cases} \tag{7.11-7}$$

Las ecuaciones (7.11-1) y (7.11-7) proporcionan una representación analítica de la corriente y el voltaje del capacitor. MATLAB proporciona una forma conveniente para obtener una

a

```
function i = CapCur(t)
  if t<2
    i=4;
  elseif t<6
    i=t+2;
  elseif t<14
    i=20-2*t;
  else
    i=-8;
  end
```

b

```
function v = CapVol(t)
  if t<2
    v = 2*t-5;
  elseif t<6
    v = 0.25*t*t+t-4;
  elseif t<14
    v = -.5*t*t+10*t-31;
  else
    v = 67-4*t;
  end
```

c

```
t = 0:1:20;
for k = 1:1:length(t)
  i(k) = CapCur(k-1);
  v(k) = CapVol(k-1);
end
plot(t,i,t,v)
text(12,10,'v(t), V')
text(10,-5,'i(t), A')
title('Capacitor Voltage and Current')
xlabel('time, s')
```

FIGURA 7.11-1
Archivos de entrada de MATLAB que representan (*a*) la corriente en el capacitor, (*b*) el voltaje en el capacitor y (*c*) archivo de entrada de MATLAB usado para graficar la corriente y el voltaje en el capacitor.

representación gráfica de estas funciones. Las figuras 7.11-1*a* y 7.11-1*b* muestran los archivos de entrada a MATLAB que representan la corriente y el voltaje del capacitor. Observe que el archivo de entrada de MATLAB que representa la corriente, figura 7.11-1*a*, es muy similar a la ecuación 7.11-1, mientras que el archivo de entrada de MATLAB que representa el voltaje, figura 7.11-1*b*, es muy similar a la ecuación 7.11-7. La figura 7.11-1*c* muestra el archivo de entrada de MATLAB que se usa para graficar la corriente y el voltaje del capacitor. La figura 7.11-2 muestra las gráficas resultantes para la corriente y el voltaje del capacitor.

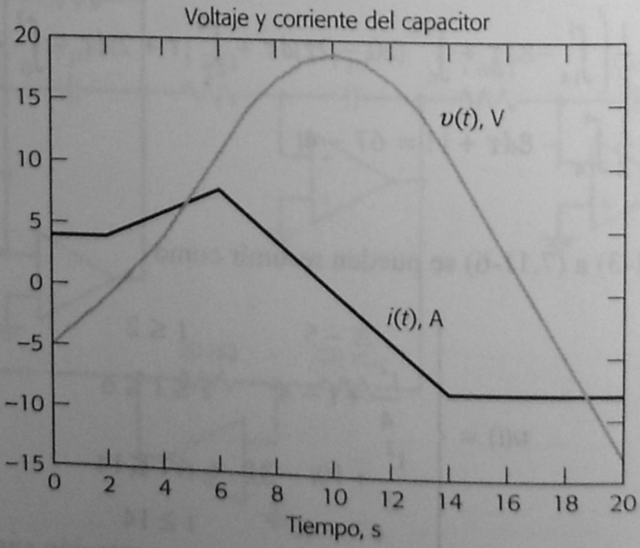


FIGURA 7.11-2
Una gráfica del voltaje y la corriente del capacitor.

7.12 Ejemplo de verificación

Problema

La solución de una tarea indica que la corriente y el voltaje de un capacitor de 2 F son

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t < 2 \\ t + 2 & 2 < t < 6 \\ 20 - 2t & 6 < t < 14 \\ -8 & t > 14 \end{cases} \qquad (7.12\text{-}1)$$

y

$$v(t) = \begin{cases} 2t - 5 & t < 2 \\ \dfrac{t^2}{4} + t - 4 & 2 < t < 6 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 10t - 21 & 6 < t < 14 \\ 67 - 4t & t > 14 \end{cases} \qquad (7.12\text{-}2)$$

donde las unidades de la corriente son A, las unidades del voltaje son V, y las unidades del tiempo son s. ¿Cómo se puede verificar esta solución de la tarea para ver si está o no correcta?

Solución

El voltaje del capacitor no puede cambiar instantáneamente. El voltaje del capacitor está dado por

$$v(t) = 2t - 5 \qquad (7.12\text{-}3)$$

cuando $t < 2$ s y por

$$v(t) = \frac{t^2}{4} + t - 4 \qquad (7.12\text{-}4)$$

cuando $2 < t < 6$ s. Debido a que el voltaje en el capacitor no puede cambiar instantáneamente, las ecuaciones 7.12-3 y 7.12-4 deben tener ambas el mismo valor para $v(2)$, el voltaje en el capacitor en el tiempo $t = 2$ s. Al evaluar la ecuación 7.12-3 da por resultado

$$v(2) = 2(2) - 5 = -1 \text{ V}$$

También al evaluar la ecuación 7.12-4 da por resultado

$$v(2) = \frac{2^2}{4} + 2 - 4 = -1 \text{ V}$$

Estos valores corresponden de modo que no se tiene error. Después, verifiquemos $v(6)$, el voltaje en el capacitor en el tiempo $t = 6$ s. El voltaje en el capacitor está dado por

$$v(t) = -\frac{t^2}{2} + 10t - 21 \qquad (7.12\text{-}5)$$

cuando $6 < t < 14$ s. Las ecuaciones 7.12-4 y 7.12-5 deben ser iguales para $v(6)$. Al evaluar la ecuación 7.12-4 da por resultado

$$v(6) = \frac{6^2}{4} + 6 - 4 = 11 \text{ V}$$

mientras que al evaluar la ecuación 7.12-5 da por resultado

$$v(6) = -\frac{6^2}{2} + 10(6) - 21 = 21 \text{ V}$$

Estas ecuaciones no corresponden. Esto quiere decir que $v(t)$ cambia instantáneamente en $t = 6$ s, y de esta manera $v(t)$ no puede ser el voltaje a través del capacitor. La solución de la tarea no es correcta.

7.13 SOLUCIÓN AL RETO DE DISEÑO

INTEGRADOR E INTERRUPTOR

En este ejemplo de diseño se examina un integrador e interruptor controlado por voltaje.

Un integrador es un circuito que efectúa la operación matemática de integración. La salida de un integrador, $v_{sal}(t)$, se relaciona con su alimentación, $v_f(t)$, mediante la ecuación

$$v_{sal}(t_2) = K \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_f(t)\ dt + v_{sal}(t_1) \tag{7.13-1}$$

La K es lo que se llama la ganancia del integrador.

Las aplicaciones de los integradores son muchas. Una es medir un intervalo de tiempo. Supóngase que $v_f(t)$ es un voltaje constante V_f, entonces

$$v_{sal}(t_2) = K \cdot (t_2 - t_1) \cdot V_f + v_{sal}(t_1) \tag{7.13-2}$$

Esta ecuación indica que la salida del integrador en el momento t_2 es una medida del intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Los interruptores se pueden controlar electrónicamente. La figura 7.13-1 muestra uno de un polo y un tiro controlado electrónicamente. El símbolo eléctrico de la figura 7.13-1*a* se usa, a veces, para subrayar que está controlado electrónicamente. El voltaje de nodo, $v_c(t)$, se llama voltaje de control. En la figura 7.13-1*b* se ve un voltaje de control típico. En este caso, el interruptor controlado por voltaje cierra cuando $v_c(t) = v_A$, y abre cuando $v_c(t) = v_B$. El interruptor de la figura está abierto antes de t_1. Cierra en el momento t_1 y permanece cerrado hasta el momento t_2. El interruptor abre en ese instante y queda abierto.

En la figura 7.13-2 el voltaje $v_c(t)$ controla al interruptor. El integrador convierte al intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ en un voltaje que se indica en el vólmetro. El intervalo que se va a medir puede ser desde 5 ms hasta 200 ms. El objetivo es diseñar el integrador. Entre los componentes disponibles hay:

- resistores normales de 2% de tolerancia (véase el Apéndice E),
- capacitores de 1 μF, 0.2 μF y 0.1 μF,
- amplificadores operacionales,
- fuentes de alimentación de +15 V y –15 V,
- potenciómetros de 1 kΩ, 10 kΩ, y 100 kΩ,
- interruptores de un polo un tiro controlados por voltaje.

DESCRIBIR LA SITUACIÓN Y LAS SUPOSICIONES

Conviene que la salida del integrador sea cero en el momento t_1. La relación entre el voltaje de salida del integrador y el intervalo de tiempo debe ser sencilla. En vista de lo anterior, sea

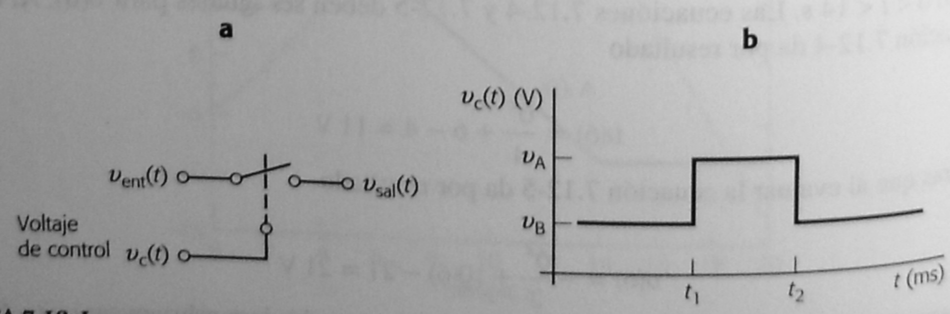


FIGURA 7.13-1
El interruptor controlado por voltaje. (*a*) Símbolo del interruptor. (*b*) Voltaje de control típico.

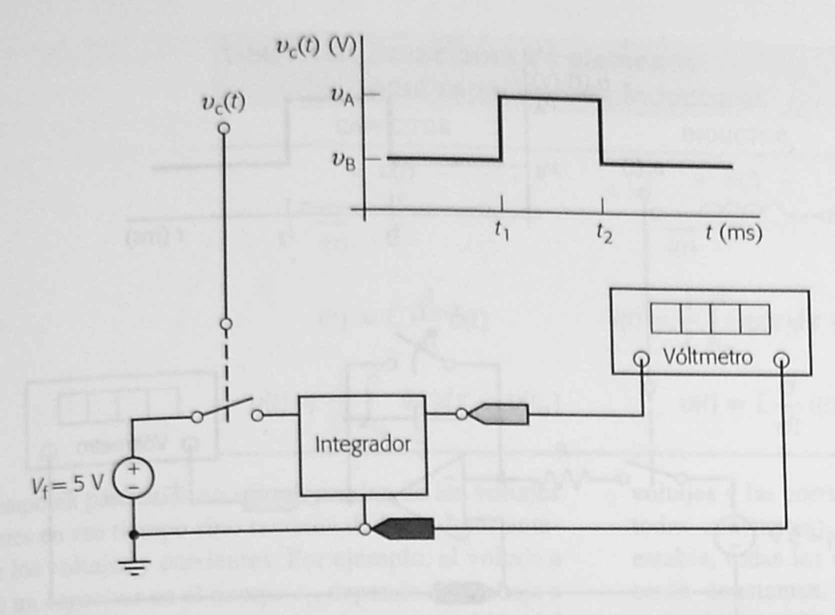


FIGURA 7.13-2
Uso de un integrador para medir un intervalo de tiempo.

$$v_{sal}(t_2) = \frac{10\text{ V}}{200\text{ ms}} \cdot (t_2 - t_1) \tag{7.13-3}$$

En la figura 7.13-2 se ve que $V_f = 5$ V. Al comparar las ecuaciones 7.13-2 y 7.13-3 se obtiene

$$K \cdot V_f = \frac{10\text{ V}}{200\text{ ms}} \quad \text{y en consecuencia} \quad K = 10\frac{1}{s} \tag{7.13-4}$$

PLANTEAR EL OBJETIVO

Diseñar un integrador que satisfaga las ecuaciones

$$K = 10\frac{1}{s} \quad \text{y} \quad v_{sal}(t_1) = 0 \tag{7.13-5}$$

ESTABLECER UN PLAN

Se usará el integrador descrito en la sección 7.10. Si se agrega un interruptor como se ve en la figura 7.13-3, se satisface la condición $v_{sal}(t_1) = 0$. El análisis que se describió en la sección 7.10 demostró que

$$v_{sal}(t_2) = \frac{1}{RC} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_f(t)\,dt \tag{7.13-6}$$

de modo que se deben escoger R y C tales que satisfagan

$$\frac{1}{RC} = K = 10\frac{1}{s} \tag{7.13-7}$$

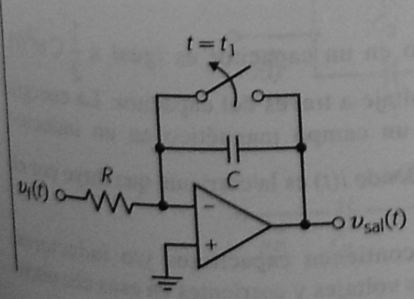


FIGURA 7.13-3
Integrador usando un amplificador operacional.

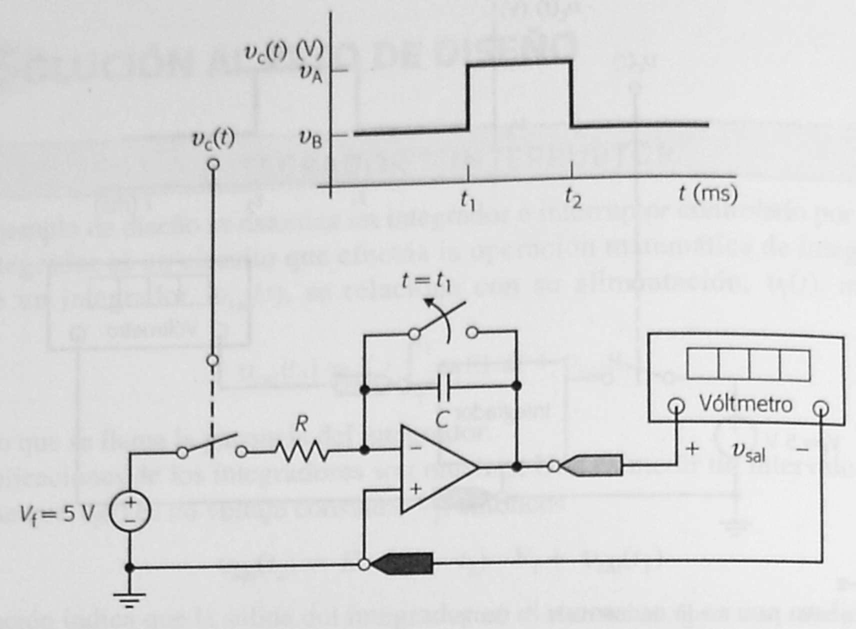


FIGURA 7.13-4
Uso de un integrador con amplificador operacional para medir un intervalo de tiempo.

ACTUAR CONFORME AL PLAN

Se puede usar cualesquiera capacitores disponibles. Si se selecciona $C = 1\ \mu$F, entonces

$$R = \frac{1}{10\frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1\ \mu\text{F}} = 100\ \text{k}\Omega \tag{7.13-8}$$

El diseño final se ve en la figura 7.13-4.

VERIFICAR LA SOLUCIÓN PROPUESTA

El voltaje de salida del integrador está dado por

$$v_{sal}(t) = \frac{-1}{RC}\int_{t_1}^{t} v_f(\tau)d\tau - v_{sal}(0) = \frac{-1}{(100\cdot 10^3)(10^{-6})}\int_{t_1}^{t} 5d\tau = 50(t - t_1)$$

donde las unidades del voltaje son V y las unidades de tiempo son s. El intervalo de tiempo se puede calcular a partir del voltaje de salida usando

$$-(t - t_1) = \frac{v_{sal}(t)}{50}$$

Por ejemplo, un voltaje de salida de -4 V indica un intervalo de tiempo de $\frac{4}{50}$ s = 80 ms.

7.14 RESUMEN

- En la tabla 7.14-1 se resumen las ecuaciones para los capacitores y los inductores. (Observe que la referencia del voltaje y la corriente se apega a la convención.) A diferencia de los elementos de circuitos que se incluyen en los capítulos anteriores, las ecuaciones de elemento para los capacitores e inductores involucran derivadas e integrales.
- Los circuitos que contienen capacitores y/o inductores son capaces de almacenar energía. La energía almacenada como un campo eléctrico en un capacitor es igual a $\frac{1}{2}Cv^2(t)$, donde $v(t)$ es el voltaje a través del capacitor. La energía almacenada como un campo magnético en un inductor es igual a $\frac{1}{2}Li^2(t)$ donde $i(t)$ es la corriente que fluye por el inductor.
- Los circuitos que contienen capacitores y/o inductores tienen memoria. Los voltajes y corrientes en esos circuitos

Tabla 7.14-1 Ecuaciones de elemento para capacitores e inductores

CAPACITOR	INDUCTOR
$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, C	$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, L
$i(t) = C \dfrac{d}{dt}\upsilon(t)$	$i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \upsilon(\tau)d\tau + i(t_0)$
$\upsilon(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + \upsilon(t_0)$	$\upsilon(t) = L\dfrac{d}{dt}i(t)$

en un tiempo en particular no sólo dependen de los voltajes y corrientes en ese tiempo sino también de los valores anteriores de los voltajes y corrientes. Por ejemplo, el voltaje a través de un capacitor en el tiempo t_1, depende del voltaje a través del capacitor en un tiempo anterior t_0, y también del valor de la corriente del capacitor entre t_0 y t_1.

- Un conjunto de capacitores en serie o en paralelo se puede reducir a un capacitor equivalente. Un conjunto de inductores en serie o en paralelo se puede reducir a un inductor equivalente. En la tabla 7.14-2 se resumen las ecuaciones para lograrlo.
- En ausencia de corrientes no acotadas, el voltaje a través de un capacitor no puede cambiar instantáneamente. De manera similar, en ausencia de voltajes no acotados, la corriente en un inductor no puede cambiar instantáneamente. En contraste, la corriente en un capacitor y voltaje a través de un inductor pueden cambiar instantáneamente.
- En ocasiones consideramos circuitos que contienen capacitores e inductores y sólo tienen entradas constantes. (Los voltajes y las corrientes de las fuentes independientes son todas constantes). Cuando dicho circuito está en estado estable, todas las corrientes y los voltajes en ese circuito serán constantes. En particular, el voltaje a través de cualquier capacitor será constante. La corriente en el capacitor será cero debido a la derivada en la ecuación para el capacitor. De manera similar, el voltaje a través de cualquier inductor será cero. En consecuencia, los capacitores actuarán como circuitos abiertos y los inductores actuarán como cortocircuitos. Observe que esta situación sólo ocurre cuando todas las entradas al circuito son constantes.
- Un amplificador operacional y un capacitor se pueden usar para hacer circuitos que realicen operaciones matemáticas de integración y diferenciación. Correctamente, esos importantes circuitos se denominan el integrador y el diferenciador.
- Los voltajes y las corrientes del elemento que contienen capacitores e inductores pueden ser funciones complicadas del tiempo. El MATLAB es útil para graficar esas funciones.

Tabla 7.14-2 Capacitores e inductores en serie y en paralelo

CIRCUITO EN SERIE O PARALELO	CIRCUITO EQUIVALENTE	ECUACIÓN
$+\ \upsilon(t)\ -$, L_2, $i(t)$, L_1	$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, L_{eq}	$L_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_2}}$
$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, L_1, L_2	$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, L_{eq}	$L_{eq} = L_1 + L_2$
$+\ \upsilon(t)\ -$, C_2, $i(t)$, C_1	$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, C_{eq}	$C_{eq} = C_1 + C_2$
$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, C_1, C_2	$+\ \upsilon(t)\ -$, $i(t)$, C_{eq}	$C_{eq} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}$

PROBLEMAS

Sección 7.3 Capacitores

P 7.3-1 Un capacitor de 15 μF tiene 5 V a través de él cuando $t = 0$. Si por el capacitor pasa una corriente constante de 25 mA, ¿cuánto tiempo tardará en acumularse una carga de 150 μC?

Respuesta: $t = 3$ ms

P 7.3-2 El voltaje, $v(t)$, a través del capacitor y la corriente, $i(t)$ en el capacitor se apegan a la convención pasiva. Determine la corriente, $i(t)$, cuando la capacitancia es $C = 0.125$ F y el voltaje es $v(t) = 12\cos(2t + 30°)$ V.

Sugerencia:

$$\frac{d}{dt}A\cos(\omega t + \theta) = -A\,\text{sen}(\omega t + \theta)\cdot\frac{d}{dt}(\omega t + \theta)$$

$$= -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$= A\omega\cos\left(\omega t + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Respuesta: $i(t) = 3\cos(2t + 120°)$ A

P 7.3-3 El voltaje $v(t)$ a través del capacitor y la corriente $i(t)$ en el capacitor se apegan a la convención pasiva. Calcule la capacitancia cuando el voltaje es $v(t) = 12\cos(500t - 45°)$ V y la corriente $i(t) = 3\cos(500t + 45°)$ mA.

Respuesta: $C = 0.5\ \mu$F

P 7.3-4 Determine $v(t)$ para el circuito de la figura P 7.3-4*a* cuando la $i_f(t)$ es la que se muestra en la figura P 7.3-4*b* y $v_{sal}(0^-) = -1$ mV.

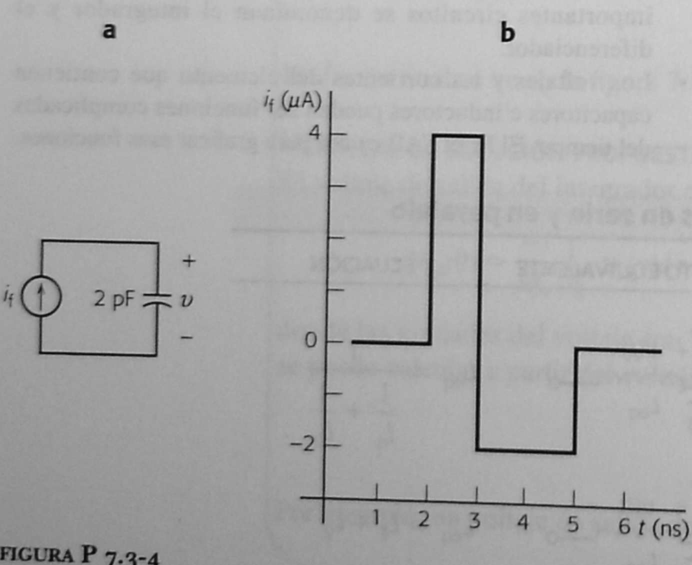


FIGURA P 7.3-4
(*a*) Corriente y (*b*) forma de onda de la fuente de corriente.

P 7.3-5 El voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ de un capacitor de 1 F se apegan a la convención pasiva. También $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A. a) Determine $v(t)$ cuando $i(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.3-5 e $i(t)$ tiene unidades de A. b) Determine $i(t)$ cuando $v(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.3-5 y $v(t)$ tiene unidades de V.

Sugerencia: $x(t) = 4t - 4$ V cuando $1 < t < 2$, y $x(t) = -4t + 12$ V cuando $2 < t < 3$.

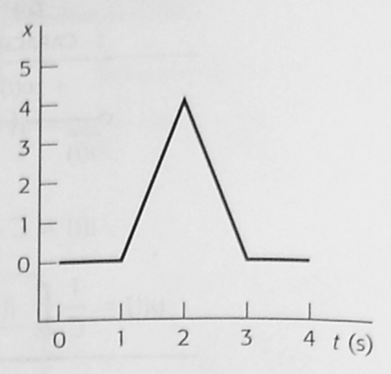


FIGURA P 7.3-5

P 7.3-6 El voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ de un capacitor de 0.5 F se apegan a la convención pasiva. También $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A. a) Determine $v(t)$ cuando $i(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.3-6 e $i(t)$ tiene unidades de A. b) Determine $i(t)$ cuando $v(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.3-6 y $v(t)$ tiene unidades de V.

Sugerencia: $x(t) = 0.2t - 0.4$ V cuando $2 < t < 6$.

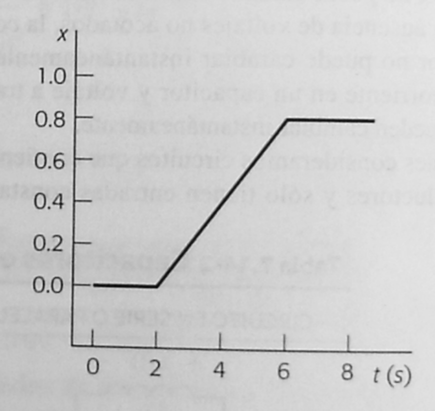


FIGURA P 7.3-6

P 7.3-7 El voltaje a través de un capacitor de 40 μF es de 25 V en $t_0 = 0$. Si la corriente a través del capacitor como función del tiempo está dada por $i(t) = 6e^{-6t}$ mA para $t < 0$, determine $v(t)$ para $t > 0$.

Respuesta: $v(t) = 50 - 25e^{-6t}$ V

P 7.3-8 Determine i para el circuito de la figura P 7.3-8 si $v = 5(1 - 2e^{-2t})$ V.

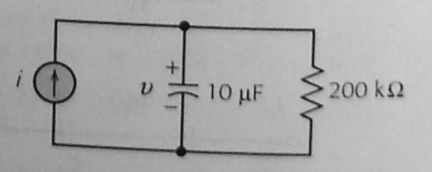


FIGURA P 7.3-8

Sección 7.4 Almacenamiento de energía en un capacitor

P7.4-1 La corriente, i, a través de un capacitor se muestra en la figura P 7.4-1. Cuando $v(0) = 0$ y $C = 0.5$ F, determine la gráfica de $v(t)$, $p(t)$ y $w(t)$ para $0 \text{ s} < t < 6$ s.

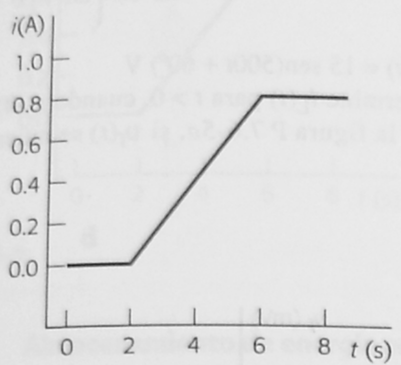


FIGURA P 7.4-1

P7.4-2 En un circuito de pulsos de potencia, el voltaje de un capacitor de 10 μF es cero cuando $t < 0$ y

$$v = 5(1 - e^{-4000t}) \text{ V} \quad t \geq 0$$

Determine i_c y la energía almacenada en el capacitor cuando $t = 0$ y $t = 10$ ms.

P7.4-3 Si $v_c(t)$ viene dado por la onda mostrada en la figura P 7.4-3, grafique la corriente del capacitor para $-1 \text{ s} \leq t \leq 2$ s. Grafique la potencia almacenada por el capacitor durante el mismo lapso cuando $C = 1$ mF.

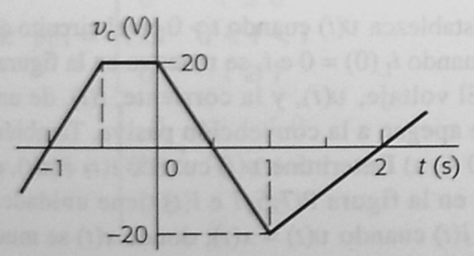


FIGURA P 7.4-3

P7.4-4 La corriente que pasa por un capacitor de 2 μF es 50 $\cos(10t + \pi/6)$ μA todo el tiempo. El voltaje promedio a través del capacitor es cero. ¿Cuál es el máximo valor de la energía almacenada en el capacitor? ¿Cuál es el primer valor no negativo de t en el que se almacena la máxima energía?

P7.4-5 Se usa un capacitor en la unidad electrónica del flash de una cámara. Para cargar el capacitor con una corriente constante de 10 μA se usa una batería pequeña con un voltaje constante de 6 V. ¿Qué tiempo toma cargar el capacitor cuando $C = 10$ μF? ¿Cuál es la energía almacenada?

Sección 7.5 Capacitores en serie y en paralelo

P7.5-1 Determine la corriente $i(t)$ para el circuito de la figura P7.5-1.

Respuesta: $i(t) = -1.2$ sen $100t$ mA

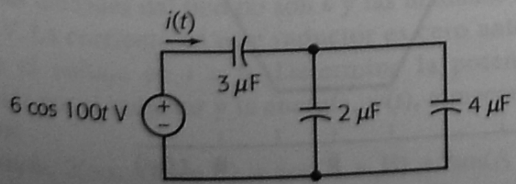


FIGURA P 7.5-1

P 7.5-2 Indique la corriente $i(t)$ para el circuito de la figura P 7.5-2.

Respuesta: $i(t) = -1.5e^{-250t}$ mA

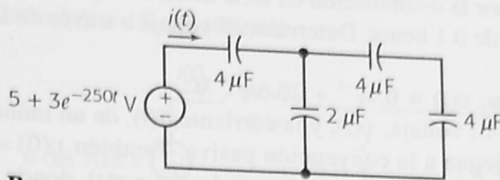


FIGURA P 7.5-2

P 7.5-3 El circuito de la figura P 7.5-3 contiene cinco capacitores idénticos. Encuentre el valor de la capacitancia C.

Respuesta: $C = 10$ μF

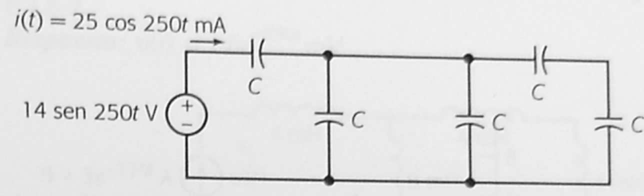


FIGURA P 7.5-3

Sección 7.6 Inductores

P 7.6-1 Nikola Tesla (1857-1943), ingeniero electricista estadounidense que experimentó con la inducción eléctrica, construyó una gran bobina con una enorme inductancia, que se muestra en la figura P 7.6-1. La bobina estaba conectada a una fuente de corriente

$$i_f = 100 \text{ sen } 400t \text{ A}$$

de forma que la corriente del inductor $i_L = i_f$. Calcule el voltaje a través del inductor y explique por qué se produce la descarga al aire mostrada en la figura. Suponga que $L = 200$ H y que la longitud promedio de las chispas es 2 m. La rigidez dieléctrica del aire es 3×10^6 V/m.

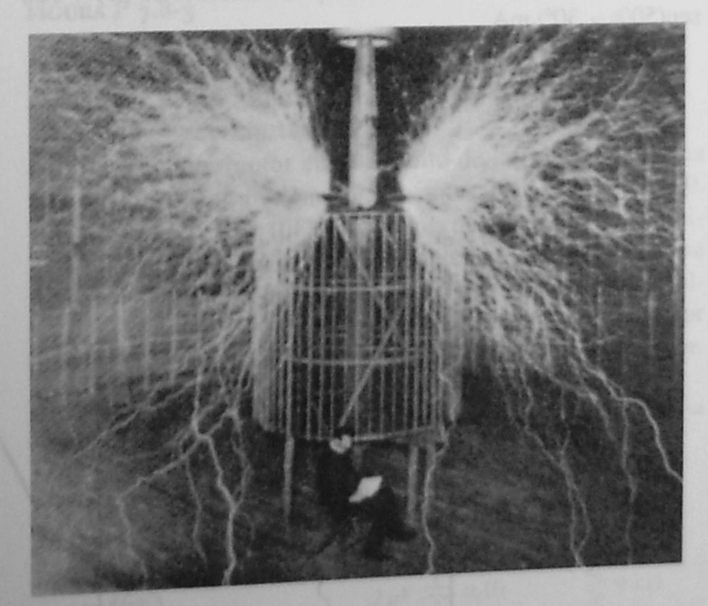


FIGURA P 7.6-1
Nikola Tesla sentado impasiblemente mientras bobinas de inducción de corriente alterna descargan millones de volts con un estruendo audible a 10 millas de distancia (alrededor de 1910). Cortesía de *Burndy Library*.

P 7.6-2 El modelo de un motor eléctrico es una combinación en serie de un resistor y un inductor. Una corriente $i(t) = 4te^{-t}$ A fluye por la combinación en serie de un resistor de 10 Ω y un inductor de 0.1 henry. Determine el voltaje a través de la combinación.

Respuesta: $v(t) = 0.4e^{-t} + 39.6te^{-t}$ V

P 7.6-3 El voltaje, $v(t)$, y la corriente, $i(t)$, de un inductor de 1 H se apegan a la convención pasiva. También $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A. a) Determine $v(t)$ cuando $i(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.6-3 e $i(t)$ tiene unidades de A. b) Determine $i(t)$ cuando $v(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.6-3 y $v(t)$ tiene unidades de V.

Sugerencia: $x(t) = 4t - 4$ V cuando $1 < t < 2$, y $x(t) = -4t + 12$ V cuando $2 < t < 3$.

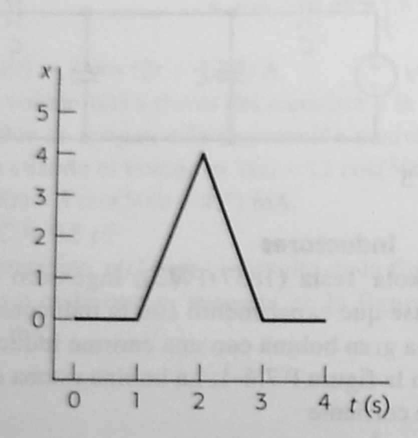


FIGURA P 7.6-3

P 7.6-4 El voltaje $v(t)$, y la corriente, $i(t)$, de un inductor se apegan a la convención pasiva. Determine el voltaje, $v(t)$, cuando la inductancia es $L = 250$ mH y la corriente es $i(t) = 120 \text{ sen}(500t - 30°)$ mA

Sugerencia:

$$\frac{d}{dt} A \text{ sen}(\omega t + \theta) = A \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta)$$
$$= A\omega \cos(\omega t + \theta)$$
$$= A\omega \text{ sen}\left(\omega t + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Respuesta: $v(t) = 15 \text{ sen}(500t + 60°)$ V

P 7.6-5 Determine $i_L(t)$ para $t > 0$, cuando $i_L(0) = -2$ μA en el circuito de la figura P 7.6-5*a*, si $v_f(t)$ se muestra la figura P 7.6-5*b*.

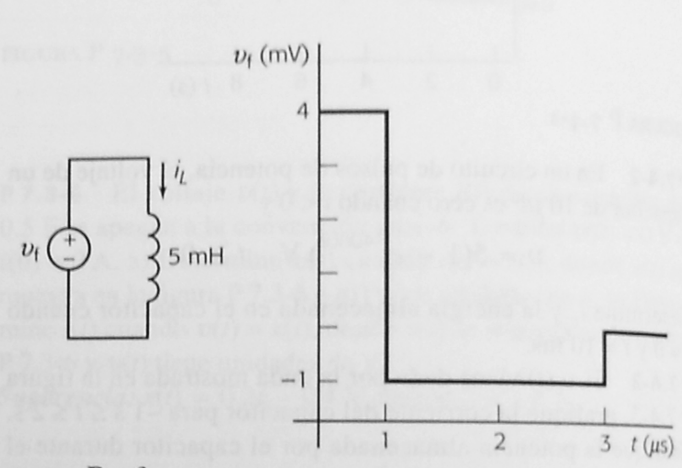


FIGURA P 7.6-5

P 7.6-6 Establezca $v(t)$ cuando $t > 0$ en el circuito de la figura P 7.6-6*a*, cuando $i_L(0) = 0$ e i_f se muestra en la figura P 7.6-6*b*.

P 7.6-7 El voltaje, $v(t)$, y la corriente, $i(t)$, de un inductor de 0.5 H se apegan a la convención pasiva. También $v(0) = 0$ V e $i(0) = 0$ A. a) Determine $v(t)$ cuando $i(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.6-7 e $i(t)$ tiene unidades de A. b) Determine $i(t)$ cuando $v(t) = x(t)$, donde $x(t)$ se muestra en la figura P 7.6-7 y $v(t)$ tiene unidades de V.

Sugerencia: $x(t) = 0.2t - 0.4$ V cuando $2 < t < 6$.

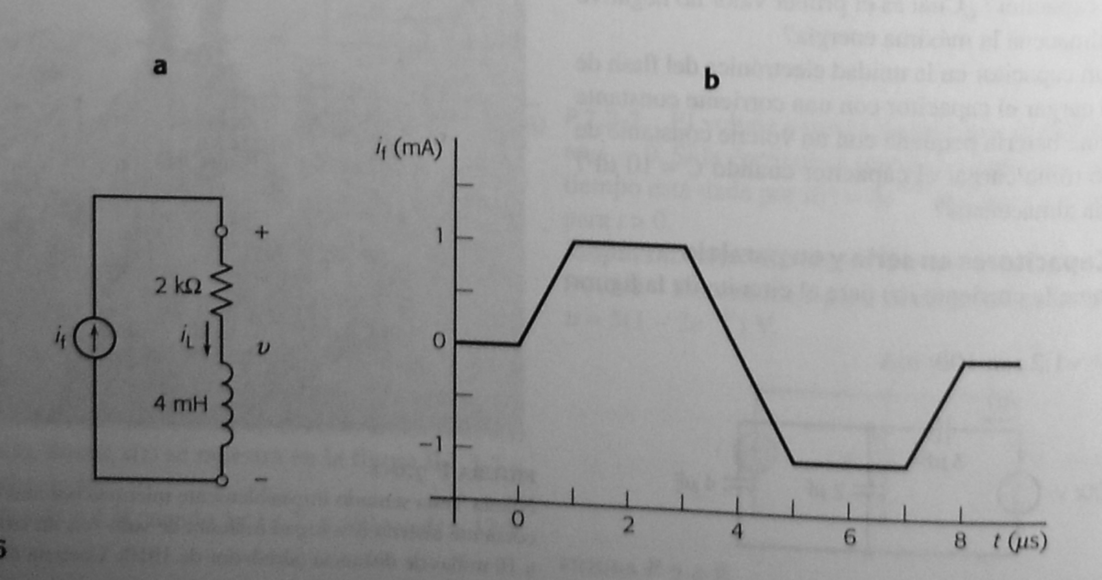


FIGURA P 7.6-6

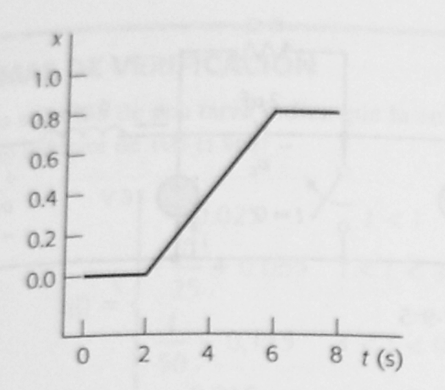


FIGURA P 7.6-7

Sección 7.7 Almacenamiento de energía en un inductor

P 7.7-1 La corriente $i(t)$ en un inductor de 100 mH conectado al circuito de un teléfono cambia de acuerdo a

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t & 0 \leq t \leq 1 \\ 4 & t \geq 1 \end{cases}$$

donde las unidades del tiempo son ms y las unidades de la corriente son mA. Determine la potencia, $p(t)$, absorbida por el inductor y la energía, $w(t)$, almacenada en el inductor.

Respuesta: $p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1.6t & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$

y $\omega(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0.8t^2 & 0 < t < 1 \\ 0.8 & t \geq 1 \end{cases}$

Las unidades de $p(t)$ son W y las unidades de $w(t)$ son J.

P 7.7-2 La corriente, $i(t)$, en un inductor de 5 H es

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4 \text{ sen } 2t & t \geq 0 \end{cases}$$

donde las unidades del tiempo son s y las unidades de la corriente son A. Determine la potencia, $p(t)$, absorbida por el inductor y la energía, $w(t)$, almacenada en el inductor.

Sugerencia: 2(cos A)(sen B) = sen(A + B) + sen(A − B)

P 7.7-3 El voltaje, $v(t)$, a través de un inductor de 25 mH usado en un experimento de potencia de fusión es

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 6 \cos 100t & t \geq 0 \end{cases}$$

donde las unidades del tiempo son s y las unidades del voltaje son V. La corriente en este inductor es cero antes de que cambie el voltaje en $t = 0$. Determine la potencia, $p(t)$, absorbida por el inductor y la energía, $w(t)$, almacenada en el inductor.

Sugerencia: 2(cos A)(sen B) = sen(A + B) + sen(A − B)

Respuesta: $p(t) = 7.2 \text{ sen } 200t$ W y $w(t) = 3.6[1 - \cos 200t]$ mJ

Sección 7.8 Inductores en serie y en paralelo

P 7.8-1 Determine la corriente $i(t)$ para el circuito de la figura P 7.8-1

Respuesta: $i(t) = 15 \text{ sen } 100t$ *mA*

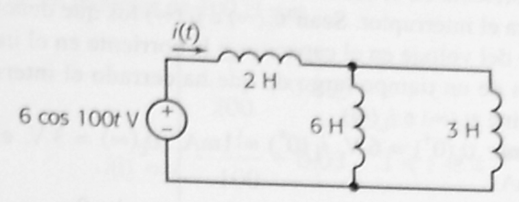


FIGURA P 7.8-1

P 7.8-2 Determine el voltaje $v(t)$ para el circuito de la figura P 7.8-2.

Respuesta: $v(t) = -6e^{-250t}$ mV

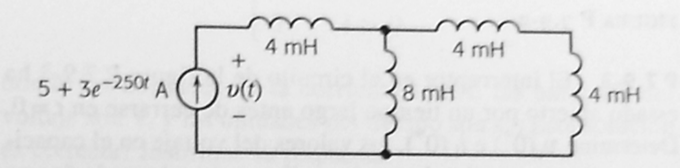


FIGURA P 7.8-2

P 7.8-3 El circuito de la figura P 7.8-3 contiene cuatro inductores idénticos. Determine el valor de la inductancia L.

Respuesta: $L = 2.86$ H

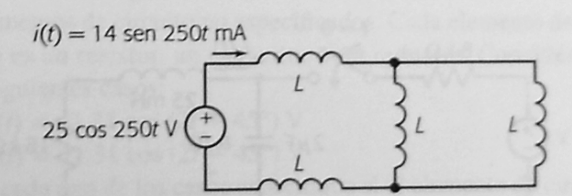


FIGURA P 7.8-3

Sección 7.9 Condiciones iniciales de circuitos conmutados

P 7.9-1 El interruptor en el circuito de la figura P 7.9-1 ha estado abierto por un tiempo largo antes de cerrarse en $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, los valores del voltaje en el capacitor y corriente en el inductor inmediatamente después de que se cierra el interruptor. Sean $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$ los que denotan los valores del voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor después de un tiempo largo de que ha cerrado el interruptor. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.

Respuesta: $v_c(0^+) = 12$ V, $i_L(0^+) = 0$, $v_c(\infty) = 4$ V, e $i_L(\infty) =$ 1mA

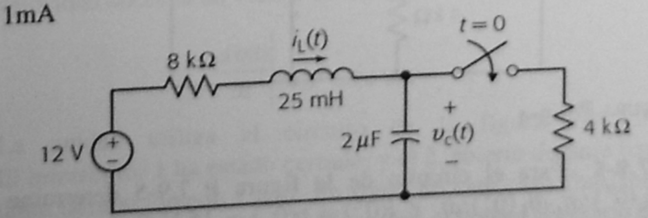


FIGURA P 7.9-1

P 7.9-2 El interruptor en el circuito de la figura P 7.9-2 ha estado abierto por un tiempo largo antes de cerrarse en $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, los valores del voltaje en el capacitor y corriente en el inductor inmediatamente después de que se cierra el interruptor. Sean $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$ los que denotan los valores del voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor después de un tiempo largo de que ha cerrado el interruptor. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.
Respuesta: $v_c(0^+) = 6$ V, $i_L(0^+) = 1$mA, $v_c(\infty) = 3$ V, e $i_L(\infty) = 1.5$ mA

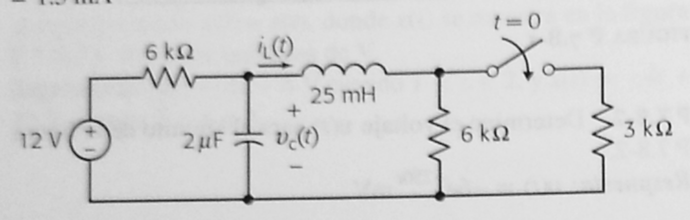


FIGURA P 7.9-2

P 7.9-3 El interruptor en el circuito de la figura P 7.9-3 ha estado abierto por un tiempo largo antes de cerrarse en $t = 0$. Determine $v_c(0^+)$ e $i_L(0^+)$, los valores del voltaje en el capacitor y corriente en el inductor inmediatamente después de que se cierra el interruptor. Sean $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$ los que denotan los valores del voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor después de un tiempo largo de que ha cerrado el interruptor. Determine $v_c(\infty)$ e $i_L(\infty)$.
Respuesta: $v_c(0^+) = 0$ V, $i_L(0^+) = 0$, $v_c(\infty) = 8$ V, e $i_L(\infty) = 0.5$ mA

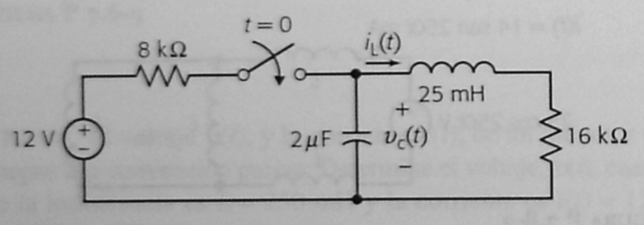


FIGURA P 7.9-3

P 7.9-4 Determine $v_c(0^+)$ y $dv_c(0^+)/dt$ si $v(0^-) = 15$ V para el circuito de la figura P 7.9-4.

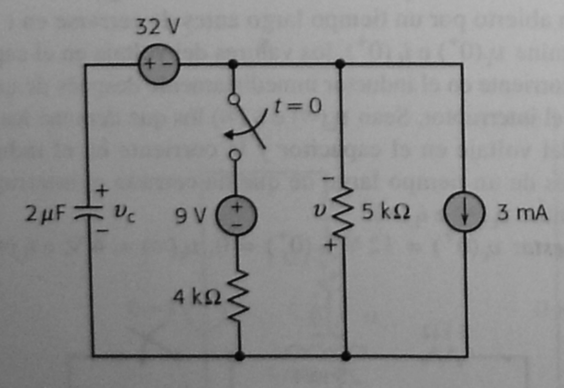


FIGURA P 7.9-4

P 7.9-5 Para el circuito de la figura P 7.9-5 determine $dv_c(0^+)/dt$, $di_L(0^+)/dt$, e $i(0^+)$ si $v(0^-) = 16$ V. Suponga que el interruptor estuvo cerrado un tiempo largo antes de $t = 0$.

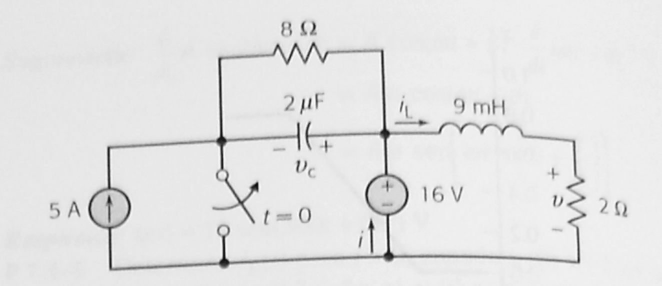


FIGURA P 7.9-5

P 7.9-6 Para el circuito de la figura P 7.9-6, determine la corriente y el voltaje de cada uno de los elementos pasivos en $t = 0^-$ y $t = 0^+$. La corriente de la fuente es $i_f = 0$ para $t < 0$ e $i_f = 4$ A para $t \geq 0$.

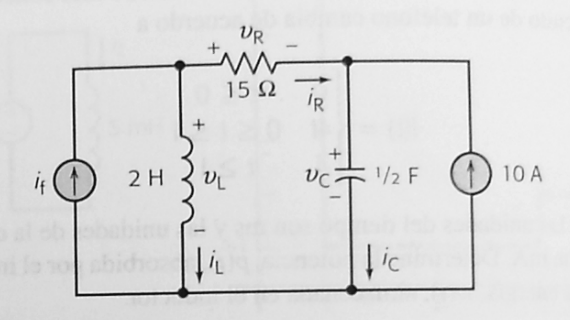


FIGURA P 7.9-6

Sección 7.10 Circuitos con amplificador operacional y ecuaciones diferenciales lineales

P 7.10-1 Diseñar un circuito con una entrada, $x(t)$, y una salida, $y(t)$, que están relacionadas por esta ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{5}{2}x(t)$$

P 7.10-2 Diseñar un circuito con una entrada, $x(t)$, y una salida, $y(t)$, que están relacionadas por esta ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = -\frac{5}{2}x(t)$$

P 7.10-3 Diseñar un circuito con una entrada, $x(t)$, y una salida, $y(t)$, que están relacionadas por esta ecuación diferencial:

$$2\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 16\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = -4x(t)$$

P 7.10-4 Diseñar un circuito con una entrada, $x(t)$, y una salida, $y(t)$, que están relacionadas por esta ecuación diferencial:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 16\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 4x(t)$$

Problemas de verificación

PV 7-1 La solución de una tarea indica que la corriente y el voltaje de un inductor de 100 H son

$$i(t) = \begin{cases} 0.025 & t < 1 \\ -\dfrac{t}{25} + 0.065 & 1 < t < 3 \\ \dfrac{t}{50} - 0.115 & 3 < t < 9 \\ 0.065 & t > 9 \end{cases}$$

$$\text{y} \quad v(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -4 & 1 < t < 3 \\ 2 & 3 < t < 9 \\ 0 & t > 9 \end{cases}$$

donde las unidades de la corriente son A, las unidades del voltaje son V, y las unidades del tiempo son s. Verifique que la corriente del inductor no cambia instantáneamente.

PV 7-2 La solución de una tarea indica que la corriente y el voltaje de un inductor de 100 H son

$$i(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{200} + 0.025 & t < 1 \\ -\dfrac{t}{100} + 0.03 & 1 < t < 4 \\ \dfrac{t}{100} - 0.03 & 4 < t < 9 \\ 0.015 & t > 9 \end{cases}$$

$$\text{y} \quad v(t) = \begin{cases} -1 & t < 1 \\ -2 & 1 < t < 4 \\ 1 & 4 < t < 9 \\ 0 & t > 9 \end{cases}$$

donde las unidades de la corriente son A, las unidades del voltaje son V, y las unidades del tiempo son s. ¿Esta solución es correcta? Justifique su respuesta.

Problemas de diseño

PD 7-1 Considérese un elemento de circuito, es decir, un resistor, un capacitor o un inductor. El voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ del elemento de circuito satisfacen la convención pasiva. Considérense los siguientes casos:

a) $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$ V e $i(t) = -3e^{-3t}$ A para $t > 0$
b) $v(t) = -3e^{-3t}$ V e $i(t) = 4 + 2e^{-3t}$ A para $t > 0$
c) $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$ V e $i(t) = 2 + e^{-3t}$ A para $t > 0$

Para cada uno de los casos especifique si el elemento de circuito es un capacitor, un resistor o un inductor, y determine el valor de su capacitancia, de su resistencia o de su inductancia, respectivamente.

PD 7-2 En la figura PD 7.2 se muestran una fuente de voltaje y elementos de circuito no especificados. Cada elemento del circuito es un resistor, un capacitor o un inductor. Considérense los siguientes casos:

a) $i(t) = 1.131 \cos(2t + 45°)$ A
b) $i(t) = 1.131 \cos(2t - 45°)$ A

Para cada uno de los casos especifique si el elemento de circuito es un capacitor, un resistor o un inductor, y determine el valor de su capacitancia, de su resistencia o de su inductancia, respectivamente.

Sugerencia: $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$

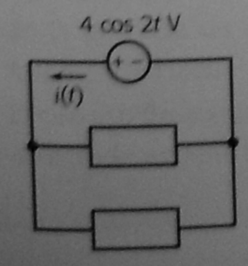


FIGURA PD 7.2

PD 7-3 En la figura PD 7.3 se muestran una fuente de voltaje y elementos de circuito no especificados. Cada elemento del circuito es un resistor, un capacitor o un inductor. Considérense los siguientes casos:

a) $v(t) = 11.31 \cos(2t + 45°)$ V
b) $v(t) = 11.31 \cos(2t - 45°)$ V

Para cada uno de los casos especifique si el elemento de circuito es un capacitor, un resistor o un inductor, y determine el valor de su capacitancia, de su resistencia o de su inductancia, respectivamente.

Sugerencia: $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$

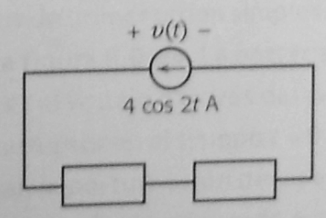


FIGURA PD 7.3

PD 7-4 Para la fotografía deportiva, una unidad de flash de alta velocidad necesita un voltaje de $v(0^+) = 3$ V y que

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = 24 \text{ V/s}$$

La unidad utiliza el circuito de la figura PD 7.4. El interruptor 1 ha estado cerrado, y el 2, abierto durante bastante tiempo cuando $t = 0$. En rigor, en este caso "bastante tiempo" significa 3 segundos. Determine el voltaje necesario de la batería, V_B, cuando $C = 1/8$ F.

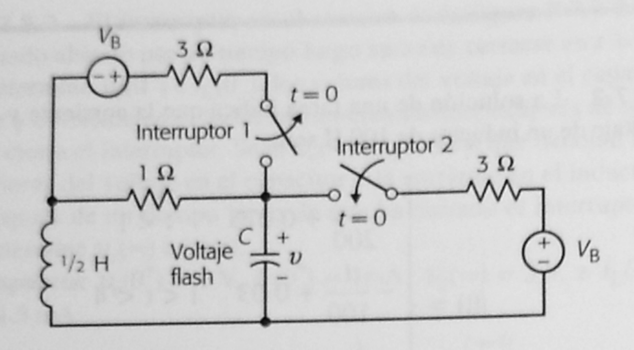


FIGURA PD 7.4

PD 7-5 En el circuito de la figura PD 7.5, seleccione un valor de R tal que, en estado estable, la energía almacenada en el inductor sea igual a la almacenada en el capacitor.

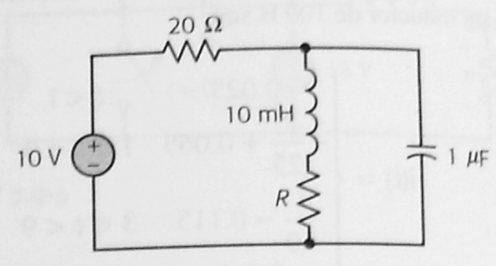


FIGURA PD 7.5